– අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය –

සංයුක්ත ගණිතය

≈ අනුකලනය ≈

Manoj Solangaarachchi
(B. Sc.)

(01) $y_n = \sin^n x$ යැයි ගනිමු. මෙහි n ඕනෑම පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි.

$\dfrac{d^2y_n}{dx^2} = n(n-1)\,y_{n-2} - n^2 y_n$ බව පෙන්වන්න.

$I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} a^{-x}\, y_n \; dx$ යැයි ලියමු. $(n > 1)$

$I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} a^{-x} \dfrac{d^2y_n}{dx^2}\; dx$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $I_n = \dfrac{n(n-1)}{n^2+1}\, I_{n-2}$ බව පෙන්වන්න. I_4 හි අගය අපෝහනය කරන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 1986)

---

(02) (i) $I = \displaystyle\int_0^{a} \dfrac{x^2}{x^2+(x-a)^2}\, dx$ සහ $J = \displaystyle\int_0^{a} \dfrac{(x-a)^2}{x^2+(x-a)^2}\, dx$ යැයි ගනිමු.

$I = J = \dfrac{a}{2}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $y = e^{-x}$ ආදේශයෙන්, $\displaystyle\int_1^{2} \dfrac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}\, dx$ අනුකලය අගයන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 1986)

---

(03) $\displaystyle\int_0^{p} \sin x \sin(p-x)\; dx = \dfrac{1}{2}(\sin p - p\cos p)$ බව පෙන්වන්න.

මෙහි p යනු නියතයක් වේ.

$I = \displaystyle\int_0^{p} \phi(x)\; dx$ හා $J = \displaystyle\int_0^{p} \phi(p-x)\; dx$ යැයි ගනිමු.

මෙහි $\phi(x)$ යනු x හි අනුකල්‍ය ශ්‍රිතයක් ද p යනු ධන නියතයක් ද වේ. $I = J$ බව පෙන්වන්න.

$f(x)$ යනු x හි සියලු තාත්ත්වික අගයන් සඳහා $f(x) + f(p - x) = q$ වන අයුරින් වූ x හි අනුකල්‍ය ශ්‍රිතයකි. මෙහි $p\ (> 0)$ සහ q නියතයන් වේ.

(i) $$\int_0^p f(x)\ dx = \frac{1}{2}pq$$

(ii) $$\int_0^p \sin x \sin(p - x)\ f(x)\ dx = \frac{1}{4}q(\sin p - p\cos p)$$ බව පෙන්වන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 1987)

---

(04) (i) $f(x)$ යන්න භින්න භාග ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

මෙහි $f(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2(x^2+1)}$ වේ.

$\displaystyle\int_0^k f(x)\ dx,\ (k > 0)$ අගයන්න.

$\displaystyle\lim_{k \to \infty} \int_0^k f(x)\ dx$ පරිමිත බව අපෝහනය කරන්න.

ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 + \tan\theta)^2}$ අගයන්න.

(ii) $I = \displaystyle\int_\alpha^\beta \sin(\log x)\ dx$ සහ $J = \displaystyle\int_\alpha^\beta \cos(\log x)\ dx$ යයි ගනිමු.

මෙහි $0 < \alpha < \beta$ වේ.

$I + J = \beta\sin(\log\beta) - \alpha\sin(\log\alpha)$ බව පෙන්වන්න. මෙය උපයෝගී කර ගනිමින් හා I සහ J හි තවත් රේඛීය සංයෝජනයක් සලකමින් I හා J අගයන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 1988)

---

(05) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය උපයෝගී කරගනිමින්,

$\displaystyle\int \sin(\log x)\ dx$ අගයන්න.

r නියතයක් වන $I = \int x^r \sin(\log x)\, dx$ සහ $J = \int x^r \cos(\log x)\, dx$ නම්,

$\left(1 + \frac{r}{2}\right) I - \frac{r}{2} J = \frac{x^{r+1}}{2}\{\sin(\log x) - \cos(\log x)\} +$ නියතයක් බව සාධනය කරන්න.

$x^{r+1} \sin(\log x)$ අවකලනය කිරීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් I සහ J අතර තවත් සම්බන්ධයක් ලබාගෙන $I = \frac{x^{r+1}}{r^2 + 2r + 2}\{(r + 1)\sin(\log x) - \cos(\log x)\} +$ නියතයක් බව අපෝහනය කරන්න.

ඒ නයින්, a හා b නියත වන $\int e^{ax} \sin bx\, dx$ අගයන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 1989)

---

(06) (i) $x(1-x)^2 = (1+x^2)(x-2) + 2$ සහ
$x^4(1-x)^4 = (1+x^2)(x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4) - 4$ බව සත්‍යාපනය කරන්න.

ඉහත දැක්වෙන ප්‍රතිඵලය භාවිතා කිරීමෙන්,

$\int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{1+x^2}\, dx$ සහ $\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}$ අගයන්න.

$3 < \pi < \frac{22}{7}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(ii) n ධන නිඛිලයක් වන විට,

$$\int \sin^3\theta \cos^n\theta\, d\theta = \frac{2}{3+n}\int \sin\theta \cos^n\theta\, d\theta - \frac{\sin^2\theta \cos^{n+1}\theta}{3+n}$$ බව

සාධනය කරන්න.

ඒ නයින්, $\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta \cos^3\theta\, d\theta$ අගයන්න.

$\int_0^1 x^3(1-x^2)\, dx$ අනුකලනය සලකා බැලීමෙන්, ඔබේ ප්‍රතිඵලය නිවැරදි දැයි

සොයා බලන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 1990)

(07) (i) $\int_0^a f(x)\ dx = \int_0^a f(a-x)\ dx$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\int_0^\pi x\sin^n x\ dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \sin^n x\ dx$ බව පෙන්වන්න.

මෙහි n යනු ධන නිඛිලයකි.

තවද, $n \geq 2$ විට, $n\int_0^\pi \sin^n x\ dx = (n-1)\int_0^\pi \sin^{n-2} x\ dx$ බවද පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\int_0^\pi x\sin^4 x\ dx$ සහ $\int_0^\pi x\sin^5 x\ dx$ අගයන්න.

(ii) $\frac{d}{d\theta}\log_e(\sec\theta + \tan\theta) = \sec\theta$ බව පෙන්වා,

$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}$ සෙවීමට එය භාවිතා කරන්න.

$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{(x+2)\sqrt{2x^2+6x+5}}$ ඇගැයීම සඳහා $y = \frac{\sqrt{2x^2+6x+5}}{x+2}$ ආදේශය

භාවිත කරන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 1991)

---

(08) (*a*) $a > 0$ නම්, $\frac{d}{dx}(a^x)$ ලබා ගෙන, c නියතයක් විට, $\int_0^c \frac{a^x}{a^x+1}\ dx$ අගයන්න.

$0 \leq c \leq \frac{\pi}{2}$ විට, $I = \int_{-c}^{c} \frac{\cos x\ \ dx}{1+a^x}$ සහ $J = \int_{-c}^{c} \frac{a^x\cos x\ dx}{1+a^x}$ නම්,

(i) $t = -x$ ආදේශය යෙදීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $I = J$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $I = J$ ලබා ගන්න. එනයින්, $c = \pi/6$ විට J හි අගය ලියන්න.

(*b*) $\int_0^1 \frac{dx}{(2+x)^{1/2}(2-x)^{3/2}}$ අගයන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 1992)

(09) (*a*) $u = \frac{1}{x} - x$ ආදේශයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ,

$$\int \frac{(1 + x^2)}{1 + x^4}\, dx$$ අනුකලනය අගයන්න.

(*b*) n ධන නිඛිලයක් යැයි සිතමු.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin (2n + 1)\, x}{\sin x}\, dx - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin (2n - 1)\, x}{\sin x}\, dx = 0$$ බව පෙන්වා,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin (2n + 1)\, x}{\sin x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$ බව අපෝහනය කරන්න.

තවද, $$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 (n + 1)\, x}{\sin^2 x}\, dx - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$ බව පෙන්වා,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 (n + 1)\, x}{\sin^2 x}\, dx$$ හි අගය අපෝහනය කරන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 1994)

---

(10) (i) $$\int \frac{5x + 3}{(x - 1)(x + 1)^2}\, dx$$ සොයන්න.

(ii) $x + 1 = \frac{1}{t}$ ආදේශයෙන්,

$$\int_1^{3} \frac{dx}{(x + 1)(4x - 3 - x^2)^{1/2}} = \int_{1/4}^{1/2} \frac{dt}{\{(4t - 1)(1 - 2t)\}^{1/2}}$$ බව පෙන්වන්න.

$t = \frac{1}{4}\cos^2 \theta + \frac{1}{2}\sin^2 \theta$ යෙදීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ අනුකලයේ අගය $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ බව පෙන්වන්න.

(iii) $$\int_0^{\pi/2} \sin^5 \theta \cos^4 \theta\, d\theta = \frac{8}{315}$$ බව පෙන්වන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 1995)

(11) (i) අදේශ කිරීමේ ක්‍රමය භාවිතයෙන් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ

$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+1}}$ සොයන්න.

(ii) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ

$\int x^3 \tan^{-1} x \, dx$ ලබා ගන්න.

(iii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \tan^3 x \, dx$ අගයන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 1996)

---

(12) (*a*) f සහ g යනු $[-a, a]$ ප්‍රාන්තරය මත අනුකල්‍ය ශ්‍රිත දෙකක් යැයි සිතමු.
$[-a, a]$ හි සියලු ම x සඳහා $f(-x) = f(x)$ සහ $g(-x) = -g(x)$ යැයි සිතමු.

$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2, \int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ සහ $\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 0$ බව පෙන්වන්න.

$\int_{-1}^{1} \frac{x^2+x^3}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$ අගයන්න.

(*b*) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය යෙදීමෙන්,

$\int_0^a x^2 h'''(x)\,dx = a^2 h''(a) - 2ah'(a) + 2h(a) - 2h(0)$ බව පෙන්වන්න;

මෙහි $h' = \frac{dh}{dx}$, $h''(x) = \frac{d^2h}{dx^2}$ සහ $h'''(x) = \frac{d^3h}{dx^3}$.

$\int_0^1 \frac{x^2}{(x-1)^{\frac{5}{2}}}\,dx$ අගයන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 1997)

---

(13) (*a*) $\frac{1}{(x^2-1)(x^2-3x+2)}$ භින්න භාග ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න.

ඒ නයින් $\int \frac{dx}{(x^2-1)(x^2-3x+2)}$ සොයන්න.

(*b*) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ බව පෙන්වා,

ඒ නයින්, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{\sin x + \cos x} = \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + \cos x}$ බව පෙන්වන්න.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{\sin x + \cos x} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}+1)$ බව අපෝහනය කරන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 1998)

---

(14) $\int \frac{1}{2+\sin x}\,dx$ සොයන්න. $\left(\text{ඉහිය } t = \tan\frac{x}{2} \text{ යොදා බලන්න.}\right)$

$\frac{\cos^2 x}{2+\sin x} = A + B\sin x + \frac{C}{1+\sin x}$ වන පරිදි A, B, C නියත නිර්ණයකර,

ඒ නයින්, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{2+\sin x}\,dx$ අගයන්න.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln(2+\sin x)\,dx = \ln 2 + \pi\left[1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right] - 1$ බව අපෝහනය කරන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 1999)

---

(15) (*a*) සුදුසු ආදේශයක් උපයෝගී කරගනිමින්, $\int_1^8 \frac{1}{(x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}})}\,dx$ අගයන්න.

(*b*) $I = \int_0^{\pi} e^{-2x}\cos x\,dx$ හා $J = \int_0^{\pi} e^{-2x}\sin x\,dx$ යැයි ගනිමු.

කොටස් වශයෙන් අනුකලන ක්‍රමය උපයෝගී කරගනිමින්, $I = 2J$ හා $J = 1 + e^{-2\pi} - 2I$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, I හා J හි අගයන් සොයන්න.

(*c*) $\int \frac{x^2 - 5x}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$ සොයන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2000)

---

(16) (*a*) සුදුසු ආදේශයක් යෙදීමෙන්, $\int_{1}^{\sqrt{2}} \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx$ අනුකලය අගයන්න.

(*b*) කොටස් වශයෙන් අනුකලන ක්‍රම භාවිතයෙන්,

$\int_{2}^{4} x \ln x \; dx = a \ln b + c$ බව පෙන්වන්න.

මෙහි a, b සහ c යනු නිර්ණය කළ යුතු නිඛිල වේ.

(*c*) $\int_{0}^{1} \frac{(7x-x^2)}{(2-x)(x^2+1)}\,dx$ සොයන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2001)

---

(17) (*a*) සුදුසු ආදේශයක් යෙදීමෙන්, $\int_{1}^{2} \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$ අනුකලය අගයන්න.

(*b*) කොටස් වශයෙන් අනුකලන ක්‍රමය භාවිතයෙන්,

$\int_{0}^{1} x \tan^{-1} x \; dx$ අනුකලය අගයන්න.

(*c*) $\int_{1}^{2} \frac{5x-4}{(1-x+x^2)(2+x)}\,dx$ සොයන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2002)

---

(18) (*a*) සුදුසු ආදේශයක් යෙදීමෙන්, $\int_{1}^{8} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$ අනුකලය අගයන්න.

(*b*) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්,

$\int_{0}^{1} x^2 e^{2x+3} \; dx$ අනුකලය අගයන්න.

(*c*) $\int \frac{dx}{x\,(x^2+3)}\,dx$ සොයන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2003)

---

(19) (*a*) සුදුසු ආදේශයක් යොදා ගනිමින්, $\displaystyle\int_{11}^{23} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{2x+3}}$ අගයන්න.

(*b*) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int e^{3x} \cos 4x \; dx$ සොයන්න.

(*c*) $\displaystyle\int \sin^4 2x \; dx$ සොයන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2004)

---

(20) (*a*) $\tan \frac{x}{2} = t$ ආදේශය යොදා ගනිමින්, $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 + 4\sin x}$ අනුකලය අගයන්න.

(*b*) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය යොදා ගනිමින්, $\displaystyle\int 15x^3 \sqrt{1+x^2} \; dx$ අනුකලය අගයන්න.

(*c*) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 10x + 13}{(x-2)(x^2 - 5x + 6)} \; dx$ සොයන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2005)

---

(21) (*a*) සුදුසු ආදේශයක් යොදා ගනිමින්, $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 + 2\cos x + \sin x}$ අගයන්න.

(*b*) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int e^{4x} \sin 3x \; dx$ සොයන්න.

(*c*) භින්න භාග භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 + 1}$ සොයන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2006)

---

(22) (*a*) භින්න භාග උපයෝගී කරගමින්, $\displaystyle\int \frac{x^3 + 1}{x\,(x-1)^3} \; dx$ සොයන්න.

(*b*) $25\cos x + 15 \equiv A\,(3\cos x + 4\sin x + 5) + B\,(-3\sin x + 4\cos x) + C$ වන ආකාරයට A, B හා C සොයන්න.

$\int$

ඒ නයින්, $\int \dfrac{25\cos x + 15}{3\cos x + 4\sin x + 5}\, dx$ සොයන්න.

(c) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය උපයෝගී කරගනිමින්,

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \; dx = \frac{5}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \; dx = \frac{5.3}{6.4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \; dx = \frac{5\pi}{32}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^6 3x \; dx$ අගයන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2007)

---

(23) (a) භින්න භාග උපයෝගී කරගමින්, $\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^2}$ සොයන්න. මෙහි $a \neq 0$ වේ.

(b) (i) $\frac{d}{dx}\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right] = 2^x$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $\int 2^x \; dx$ බව පෙන්වන්න.

(iii) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\int_{-1}^{1} 2^{\sqrt{x+1}} \; dx$ අගයන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2008)

---

(24) (a) $I_k = \int \frac{e^t}{t^k} \; dt$ යැයි ගනිමු. මෙහි $t > 0$ වන අතර k ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි.

$(k-1)\, I_k - I_{k-1} + \frac{e^t}{t^{k-1}} = C$ බව පෙන්වන්න. මෙහි C අභිමත නියතයකි.

$\int e^x \left[\frac{1-x}{1+x}\right]^2 dx$ සොයන්න. මෙහි $x > -1$ වේ.

(b) f යනු තාත්ත්වික සංඛ්‍යා කුලකය මත අර්ථ දක්වා ඇති තාත්ත්වික අගයන් ගන්නා ශ්‍රිතයක් වන අතර, $J = \int_0^{a} f(x) \; dx$ වේ. මෙහි $a > 0$ වේ.

$\int_0^{a} f(a-x) \; dx = J$ බව පෙන්වන්න.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}$

$\dfrac{\sin^{2k} x}{\cos^{2k} x + \sin^{2k} x}\, dx$ අගයන්න. මෙහි k ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2009)

---

(25) (*a*) භින්න භාග උපයෝගී කරගමින්, $\displaystyle\int \frac{2x}{(1+x^2)(1+x)^2}\, dx$ සොයන්න.

(*b*) $I = \int e^{ax} \cos bx \; dx$ හා $J = \int e^{ax} \sin bx \; dx$ යැයි ගනිමු; මෙහි a හා b යනු ශූන්‍ය නොවන තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ.

(i) $bI + aJ = e^{ax} \sin bx,$

(ii) $aI - bJ = e^{ax} \cos bx$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, I හා J සොයන්න.

(*c*) $x^3 t + 1 = 0$ ආදේශය උපයෝගී කරගනිමින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ,

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\,(x^3-1)} = \frac{1}{3} \ln\left[\frac{9}{2}\right]$$ බව පෙන්වන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2010)

---

(26) (*a*) **කොටස් වශයෙන් අනුකලනය** යෙදීමෙන්, $\displaystyle\int_1^e x^{\frac{3}{2}} \ln x \; dx$ අගයන්න.

(*b*) $t = \tan x$ යැයි ගනිමු.

$\cos 2x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin 2x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ හා $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t}{1+t^2}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4\cos 2x + 3\sin 2x + 5}\, dx = \frac{1}{12}$ බව පෙන්වන්න.

(*c*) a හා b යනු ප්‍රභින්න තාත්ත්වික සංඛ්‍යා යැයි ගනිමු.

$x \in \mathbb{R} - \{a, b\}$ සඳහා $\dfrac{1}{(x-a)(x-b)} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b}$ වන අයුරින් A හා B නියත සොයන්න.

ඉහත සමීකරණයේ x, a හා b සුදුසු ලෙස ප්‍රතිස්ථාපනය කරමින්, $\dfrac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$

යන්න භින්න භාග ඇසුරෙන් ලියා දක්වා,

ඒ නයින්, $\int \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx$ සොයන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2011)

---

(27) (*a*) $\int_0^{\pi} (\sin^3 x - \cos^3 x)\ dx = \frac{4}{3}$ බව පෙන්වන්න. (මෙම උත්තරය දෝෂ සහිතය.)

(*b*) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය යොදා ගනිමින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ $\int x^3 \tan^{-1} x\ dx$ සොයන්න.

(*c*) භින්න භාග යොදාගනිමින්, $\int \frac{2x^2-3}{(x-2)^2(x^2+1)}\,dx$ සොයන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2012)

---

(28) (*a*) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\int x^2 \sin^{-1} x\ dx$ සොයන්න.

(*b*) භින්න භාග භාවිතයෙන්, $\int \frac{x^2+3x+4}{(x^2-1)(x+1)^2}\,dx$ සොයන්න.

(*c*) $a^2 + b^2 > 1$ වන පරිදි $a, b \in \mathbb{R}$ යැයි ද,

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{a + \cos x}{a^2 + b^2 + a\cos x + b\sin x}\,dx$$ හා

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{b + \sin x}{a^2 + b^2 + a\cos x + b\sin x}\,dx$$ යැයි ද ගනිමු.

$aI + bJ = \frac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න.

$bI - aJ$ සැලකීමෙන් I හා J හි අගයන් සොයන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2013)

---

(29) (*a*) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^2+2x+5}\,dx$ සොයන්න.

(*b*) **කොටස් වශයෙන් අනුකලනය** භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int_1^{e^{\pi}} \cos(\ln x)\,dx = -\frac{1}{2}\,(e^{\pi}+1)$ බව පෙන්වන්න.

(*c*) $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ සූත්‍රය පිහිටුවන්න; මෙහි a යනු නියතයකි.

$p(x) = (x-\pi)(2x+\pi)$ යැයි ද $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{p(x)}\,dx$ යැයි ද ගනිමු.

ඉහත ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{p(x)}\,dx$ බව පෙන්වන්න.

I සඳහා වූ ඉහත අනුකල දෙක භාවිතයෙන් $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{p(x)}\,dx$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

ඒ නයින්, $I = \dfrac{1}{6\pi}\ln\left(\dfrac{1}{4}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2014)

---

(30) (*a*) $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} f(\pi-x)\,dx$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}$ බවත් පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin^2 x\,dx = \frac{\pi^2}{4}$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) සුදුසු ආදේශයක් හා **කොටස් වශයෙන් අනුකලන** ක්‍රමය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int x^3 e^{x^2}\,dx$ සොයන්න.

(*c*) $\dfrac{1}{x^3-1} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$ වන පරිදි A, B හා C නියතවල අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $\frac{1}{x^3-1}$ යන්න x විෂයයෙන් අනුකලනය කරන්න.

(*d*) $t = \tan\frac{x}{2}$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+4\cos x+3\sin x} = \frac{1}{6}$ බව පෙන්වන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2015)

---

(31) (*a*) (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ සොයන්න.

(ii) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{3+2x-x^2}\right)$ සොයා, **ඒ නයින්,** $\frac{x-1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx$ සොයන්න.

ඉහත අනුකල භාවිතයෙන් $\int \frac{x+1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx$ සොයන්න.

(*b*) $\frac{2x-1}{(x+1)(x^2+1)}$ භින්න භාග ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කර, **ඒ නයින්,** $\int \frac{(2x-1)}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$ සොයන්න.

(*c*) (i) $n \neq -1$ යැයි ගනිමු. කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\int x^n\,(\ln x)\,dx$ සොයන්න.

(ii) $\int_1^3 \frac{In\,x}{x}\,dx$ අගයන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2016)

---

(32) (*a*) (i) $\frac{1}{x\,(x+1)^2}$ භින්න භාග ඇසුරෙන් ප්‍රකාශකර, **ඒ නයින්,** $\int \frac{1}{x\,(x+1)^2}\,dx$ සොයන්න.

(ii) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\int xe^{-x}\,dx$ සොයා,

ඒ නයින්, $y = xe^{-x}$ වක්‍රයෙන් ද $x = 1,\ x = 2$ හා $y = 0$ සරල රේඛාවලින් ද ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය සොයන්න.

(*b*) $c > 0$ හා $I = \int_0^c \frac{\ln\,(c+x)}{c^2+x^2}\,dx$ යැයි ගනිමු. $x = c\tan\theta$ ආදේශය භාවිතයෙන්,

$I = \frac{\pi}{4c}\ln c + \frac{1}{c}J$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\,(1+\tan\theta)\;d\theta$ වේ.

a නියතයක් වන $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්, $J = \frac{\pi}{8} \ln 2$ බව පෙන්වන්න.

$I = \frac{\pi}{8c} \ln (2c^2)$ බව අපෝහනය කරන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2017)

---

(33) (*a*) (i) x^2, x^1 හා x^0 හි සංගුණක සැසඳීමෙන්,
සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $Ax^2(x-1) + Bx(x-1) + C(x-1) - Ax^3 = 1$ වන පරිදි, A, B හා C නියතවල අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $\frac{1}{x^3(x-1)}$ යන්න භින්න භාග වලින් ලියා දක්වා $\int \frac{1}{x^3(x-1)}\,dx$ සොයන්න.

(ii) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\int x^2 \cos 2x\,dx$ සොයන්න.

(*b*) $\theta = \tan^{-1}(\cos x)$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx = 2\ln(1+\sqrt{2})$ බව පෙන්වන්න.

a නියතයක් වන $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්,

$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx$ සොයන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2018)

---

(34) (*a*) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ සඳහා $x = 2\sin^2\theta + 3$ ආදේශය භාවිතයෙන් $\int_3^4 \sqrt{\frac{x-3}{5-x}}\, dx$ අගයන්න.

(*b*) භින්න භාග භාවිතයෙන්, $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\, dx$ සොයන්න.

$t > 2$ සඳහා $f(t) = \int_3^t \frac{1}{(x-1)(x-2)}\, dx$ යැයි ගනිමු.

$t > 2$ සඳහා $f(t) = \text{In}\,(t-2) - \text{In}\,(t-1) + \text{In}\, 2$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\int \text{In}\,(x-k)\, dx$ සොයන්න.

මෙහි k යනු තාත්ත්වික නියතයකි.

ඒ නයින්, $\int f(t)\, dt$ සොයන්න.

(*c*) c හා b නියත වන $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(a+b-x)\, dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්,

$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x \cos^2 x}{1+e^x}\, dx$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x}\, dx$ හි අගය සොයන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2019)

✦✦✦

Manoj Solangaarachchi

(B. Sc.)